

Einführen in das mathematische Arbeiten

Vorüberlegung

Die Arbeitsaufträge für die erste und zweite Phase sind der PPT Kubische Lösungsformel zu entnehmen.

Die Seite „Übersicht der einzelnen Beispiele“ sollte auf mindestens DIN A3 Größe ausgedruckt aufgehängt werden.

Geogebra erlaubt eine Vereinfachung und zielgerichtete Verfolgung der einzelnen Schritte, ist aber für einen Mathe + nicht zwingend erforderlich.

Der Ausblick dient einer weiterführenden Fragestellung und ist nur als Hintergrundinformation gedacht. Der geneigte Leser kann sich für ein tieferes Verständnis in angegebener Quelle informieren.

Die Schlussreflektion verlangt einen Rückblick und damit eine Sicht auf die einzelnen Schritte aus einer neuen Warte. Erst damit werden die Struktur und damit der Gedankengang klar. Wissenschaftliches und damit auch mathematisches Arbeiten erfordert immer eine Betrachtung aus einer Metaebene.

Arbeitsblatt: Reflektion

Warum wird die Lösungsformel für Kubische Gleichungen der Form $x^3+px+q=0$ in der Schule nicht unterrichtet?

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

Reflektion: Notieren Sie in Stichworten die einzelnen Schritte dieses Forschungsgangs und deren Begründung.

Lösung einer Kubischen Gleichung: $x^3+ax^2+bx+c=0$

$$3x^3+6x^2-3x+9=0$$

$$x^3+2x^2-1x+3=0$$

$$x^3+ax^2+bx+c$$

$$x^3+px+q$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} +$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

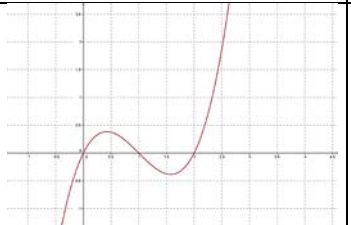
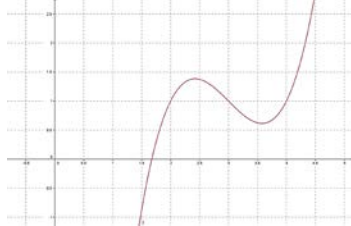
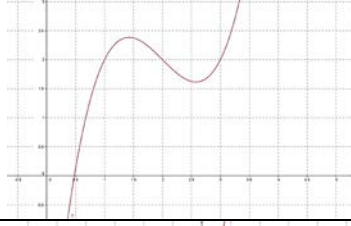

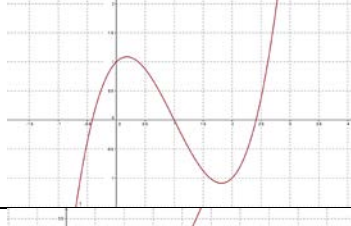
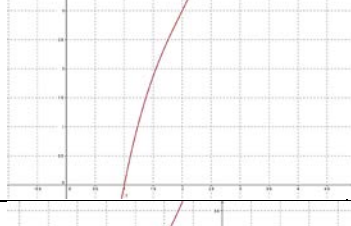
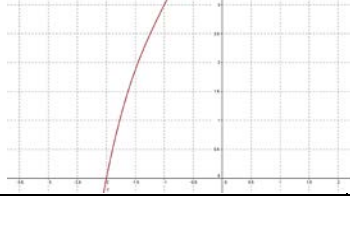
$$\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} > 0$$

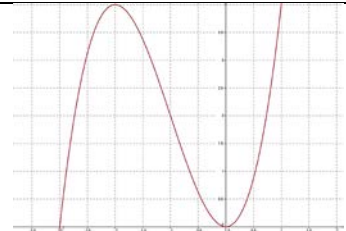
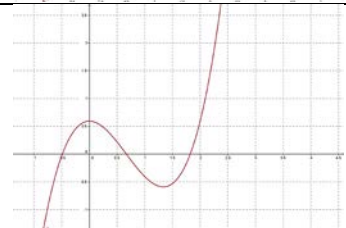


„Funktionskarten“

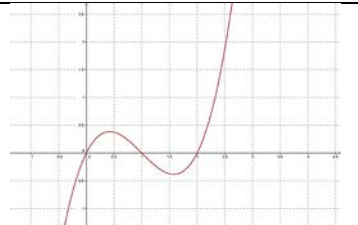
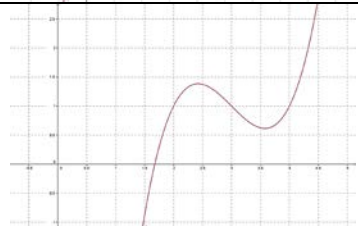
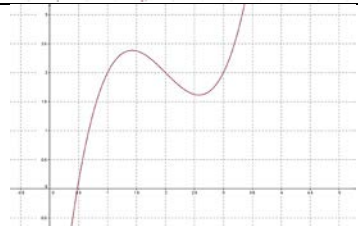
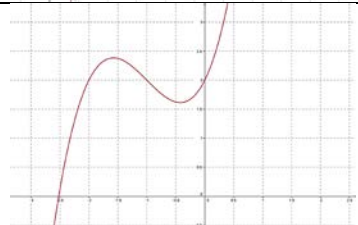
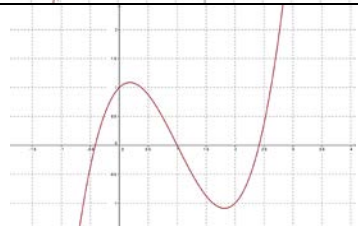
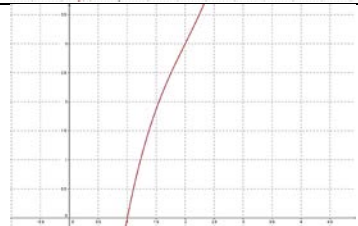
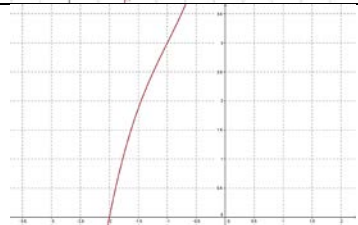
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$	$g(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 23$
$h(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - \frac{1}{4}$	$i(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 2$
$j(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$	$k(x) = x^3 - 6x^2 + 14x - 9$
$l(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + \frac{1}{6}$	$m(x) = x^3 + 3x^2$
$n(x) = x^3 - 3x^2 + 4$	$o(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{16}{27}$

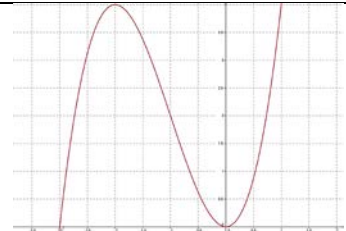
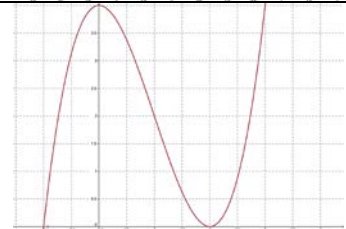
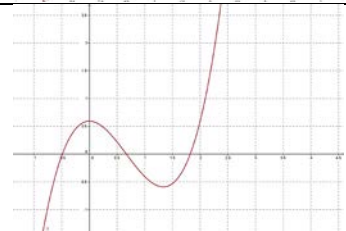
Übersicht der einzelnen Beispiele:

Graph	Funktionsterm	X-Wert des Wendepunktes	verschobene Funktion	Bedingung $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}$
	$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$	$x_w = 1$	$f_v(x) = x^3 - x$	$\frac{-1^3}{27} + 0 < 0$ 3 Nullstellen
				
				
				
				
				
				

Lösungen

Graph	Funktionsterm	X-Wert des Wende- punktes	verschobene Funktion	Bedingung $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}$
	$f(x)=x^3 - 3 x^2 + 2x$	$x_w = 1$	$f_v(x)=x^3 - x$	$\frac{-1^3}{27} + 0 < 0$ 3 Nullstellen
	$g(x)=x^3 - 9 x^2 + 26 x - 23$	$(3/1)$	$g_v(x)=x^3 - x + 1$	$\frac{(-1)^3}{27} + \frac{1^2}{4} > 0$ 1 Nullstelle
	$h(x)=x^3 - 6 x^2 + 11 x - 4$	$(2/2)$	$h_v(x)=x^3 - x + 2$	$\frac{(-1)^3}{27} + \frac{2^2}{4} > 0$ 1 Nullstelle
	$i(x)=x^3 + 3 x^2 + 2 x + 2$	$(-1/2)$	$i_v(x)=x^3 - x + 2$	$\frac{(-1)^3}{27} + \frac{2^2}{4} > 0$ 1 Nullstelle
	$j(x)=x^3 - 3 x^2 + x + 1$	$(1/0)$	$j_v(x)=x^3 - 2x$	$\frac{(-2)^3}{27} + 0 < 0$ 3 Nullstellen
	$k(x)=x^3 - 6 x^2 + 14 x - 9$	$(2/3)$	$k_v(x)=x^3 + 2x + 3$	$\frac{2^3}{27} + \frac{3^2}{4} > 0$ 1 Nullstelle
	$l(x)=x^3 + 3 x^2 + 5 x + 6$	$(-1/3)$	$l_v(x)=x^3 + 2x + 3$	$\frac{2^3}{27} + \frac{3^2}{4} > 0$ 1 Nullstelle

	$m(x) = x^3 + 3x^2$	$(-1/2)$	$m_v(x) = x^3 - 3x + 2$	$\frac{(-3)^3}{27} + \frac{2^2}{4} = 0$ 2 Nullstellen
	$n(x) = x^3 - 3x^2 + 4$	$(1/2)$	$n_v(x) = x^3 - 3x + 2$	$\frac{(-3)^3}{27} + \frac{2^2}{4} = 0$ 2 Nullstellen
	$o(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{16}{27}$	$(\frac{2}{3}/0)$	$o_v(x) = x^3 - \frac{4}{3}x$	$\frac{(-\frac{4}{3})^3}{27} + 0 < 0$ 3 Nullstellen

Hinweise zu Phase 1:

Berechnung des x-Wertes des Wendepunktes:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f''(x) = 6x + 2a$$

$$f''(x) = 0$$

$$6x = -2a$$

$$x = -\frac{a}{3}$$

Hinweis zu Phase 2:

Verschiebung so dass der Wendepunkt auf der y-Achse liegt. Ergänzen Sie in den fehlenden Zeilen die Rechnung und versehen Sie die einzelnen Rechenschritte mit einem Kommentar

Zur Erinnerung: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2 \cdot b + 3ab^2 - b^3$

Rechnung	Kommentar
$f\left(x - \left(\frac{a}{3}\right)\right) =$	
$\left(x^3 - 3\left(\frac{a}{3}\right)x^2 + 3\left(\frac{a}{3}\right)^2 x + \left(\frac{a}{3}\right)^3\right) + a \cdot \left(x^2 - 2\left(\frac{a}{3}\right)x + \left(\frac{a}{3}\right)^2\right) + b \cdot \left(x - \left(\frac{a}{3}\right)\right) + c$	
$\left(x^3 - ax^2 + \frac{a^2}{3}x - \frac{a^3}{27}\right) + \left(ax^2 - \frac{2a^2}{3}x + \frac{a^3}{9}\right) + \left(bx + \frac{ab}{3}\right) + c$	
$x^3 - ax^2 + ax^2 + \frac{a^2}{3}x - \frac{2a^2}{3}x + bx - \frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} + \frac{ab}{3} + c$	
$x^3 + \frac{a^2}{3}x - \frac{2a^2}{3}x + bx - \frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} + \frac{ab}{3} + c$	
$x^3 + \frac{-a^2 + 3b}{3}x + \frac{-2a^3 + 9ab}{27} + c$	

daraus folgt $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + px + q = 0$ mit $p = \frac{-a^2 + 3b}{3} \wedge q = \frac{-2a^3 + 9ab}{27} + c$

Verschiebung so dass der Wendepunkt auf der y-Achse liegt ausführlich.

Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} f\left(x - \left(\frac{a}{3}\right)\right) &= \left(x - \left(\frac{a}{3}\right)\right)^3 + a\left(x - \left(\frac{a}{3}\right)\right)^2 + b\left(x - \left(\frac{a}{3}\right)\right) + c \\ &= \left(x^3 - 3\left(\frac{a}{3}\right)x^2 + 3\left(\frac{a}{3}\right)^2 x + \left(\frac{a}{3}\right)^3\right) + a\left(x^2 - 2\left(\frac{a}{3}\right)x + \left(\frac{a}{3}\right)^2\right) + b\left(x - \left(\frac{a}{3}\right)\right) + c \\ &= \left(x^3 - ax^2 + \frac{a^2}{3}x - \frac{a^3}{27} + ax^2 - \frac{2a^2}{3}x + bx - \frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} + \frac{ab}{3} + c\right) \\ &= x^3 - ax^2 + ax^2 + \frac{a^2}{3}x - \frac{2a^2}{3}x + bx - \frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} + \frac{ab}{3} + c \\ &= x^3 + \frac{a^2}{3}x - \frac{2a^2}{3}x + bx - \frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} + \frac{ab}{3} + c \\ &= x^3 + \frac{a^2 - 2a^2 + 3b}{3} \cdot x + \frac{-a^3 + 3a^3 + 9ab}{27} + c \\ &= x^3 + \frac{-a^2 + 3b}{3} \cdot x + \frac{-2a^3 + 9ab}{27} + c \end{aligned}$$

Lösungsskizze:

Warum wird die Lösungsformel für Kubische Gleichungen in der Schule nicht unterrichtet?

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

Reflektion: Notieren Sie in Stichworten die einzelnen Schritte dieses Forschungsgangs und deren Begründung.

Lösung einer Kubischen Gleichung: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

$3x^3 + 6x^2 - 3x + 9 = 0$ $x^3 + 2x^2 - x + 3 = 0$	<ul style="list-style-type: none"> • Durch den höchsten Koeffizienten wird geteilt, dadurch ändert sich die Lösungsmenge nicht.
$x^3 + ax^2 + bx + c$ $x^3 + px + q$	<ul style="list-style-type: none"> • Durch Verschiebung des Wendepunktes auf die y-Achse vereinfacht sich der allgemeine Fall. • Der quadratische Summand fällt weg. • Die Lösung kann anschließend durch "Rückverschiebung" gewonnen werden.
$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$ $+ \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$	<ul style="list-style-type: none"> • Die Lösungsformel wird angegeben und die Voraussetzungen gesucht.
$\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} > 0$	<ul style="list-style-type: none"> • Erkennen des Zusammenhangs zwischen Voraussetzung und Anzahl der Lösungen.

Die Lösungsformel für Kubischen Gleichungen liefert nur in bestimmten Fällen ein befriedigendes Ergebnis. Damit ist sie, im Unterschied zur quadratischen Lösungsformel, kein universales Werkzeug.

